4

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

Discrete Probability Distribution

กานต์ ศุภจิตกุล วิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ ม.นเรศวร

Discrete Probability Distribution

1. การแจกแจงเอกรูป (Uniform Dist.)
2. การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Dist.)
3. การแจกแจงแบบพหุนาม (Multinomial Dist.)
4. การแจกแจงไฮเปอร์จีออเมตริก (Hypergeometric Dist.)
5. การแจกแจงปัวซอง (Poisson Dist.)

การแจกแจงเอกรูป (Discrete Uniform Distribution)

1 ลักษณะเด่น เป็นการทดลองสุ่มที่เกิดขึ้น โดยที่ตัวแปรสุ่มแต่ละตัว *มีค่าความน่าจะเป็นเท่ากัน* หมด

2 ตัวอย่าง โยนลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนแต้มที่ได้

$x = \{1,2,3,4,5,6\}$ และตัวแปรสุ่ม x ทุกตัวมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/6

3 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$f(x\,;k) = \frac{1}{k} \qquad \text{เมื่อ } k = \text{จำนวนของ } x$$

4 ค่าเฉลี่ย $\mu = E[X] = \sum x_i / k$

5 ค่าความแปรปรวน $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

การแจกแจงเอกรูป (Discrete Uniform Distribution)

ตัวอย่างที่ 4-2 หยิบสลาก 1 ใบ จากกล่องบรรจุสลากเลข (1-10) ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนแต้มบนสลากที่สุ่มหยิบได้ ให้หาฟังก์ชันการแจกแจงเอกรูปของ X

วิธีทำ $f(x\,;k) = \frac{1}{k} = \frac{1}{10}$ เมื่อ $x = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ $k = 10$

ค่าเฉลี่ย $\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{k} = \underline{5}$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

ค่าความแปรปรวน $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$= [(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots +10^2)]/11] - [5]^2 = \underline{10}$

การแจกทวินาม (Binomial Distribution)

1 ลักษณะเด่น เป็นการทดลองแบบเบอร์นูลีย์ (Bernoulli trials) เป็นการทดลองที่เหมือนกัน (ซ้ำ ๆ กัน) n ครั้ง และแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน และการทดลองแต่ละครั้งให้ผลลัพธ์เพียง 2 อย่าง คือ สำเร็จ (Success) และ ล้มเหลว (Failure)

2 ตัวอย่าง การโยนเหรียญ

การทำข้อสอบถูกผิด 10 ข้อ

3 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

เมื่อ $x = 1, 2, 3, \ldots, n$

4 ค่าเฉลี่ย $\mu = E[X] = np$

5 ค่าความแปรปรวน $var(X) = var(X) = npq$

หลักการคำนวณเรื่องการแจกแจงทวินาม

1. พิจารณาว่าโจทย์สนใจอะไร ---- กำหนดให้เป็นตัวแปรสุ่ม x

2. หา p(x) ----- ความน่าจะเป็นที่จะเกิด x ในการทดลองแต่ละครั้ง

3. q(x) = 1 – p(x) และ n คือจำนวนครั้งในการทดลอง

4. แทนค่าในสูตรแล้วคำนวณ

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

การแจกทวินาม (Binomial Distribution)

ตัวอย่าง ในการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญจำนวน 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวจำนวน 3 ครั้ง

<u>วิธีทำ</u> ให้ x คือ จำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว

$p(x)$ = ความน่าจะเป็นที่เหรียญออกหัว = 0.5

จะได้ว่า $x = 3$; $n = 5$; $p = 0.5$; $q = 0.5$

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} = \binom{5}{3} (0.5)^{3} (0.5)^{5-3} = \underline{0.3125}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัว 3 ครั้ง เท่ากับ <u>31.25%</u>

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

ตัวอย่าง ทำข้อสอบปรนัย 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ จงหาความน่าจะเป็นที่จะทำข้อสอบถูกไม่เกิน 3 ข้อ

<u>วิธีทำ</u> ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนข้อที่ทำถูก

$p(x)$ = ความน่าจะเป็นที่ทำข้อสอบถูก = 0.2 $q = 0.8$ และ $x = 0, 1, 2, 3$

$$p(x \leq 3) = b(0;5,0.2) + b(1;5,0.2) + b(2;5,0.2) + b(3;5,0.2)$$

$$p(x \leq 3) = \binom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^5 + \binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^4 + \binom{5}{2}(0.2)^2(0.8)^3 + \binom{5}{3}(0.2)^3(0.8)^2 = \underline{\mathbf{0.99328}}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะทำข้อสอบถูกไม่เกิน 3 ข้อ เท่ากับ <u>99.328%</u>

ตารางผลรวมการแจกแจงทวินาม

$$B(r; n, p) = \sum b(x; n, p)$$

เช่น

$$B(2;n,p) = b(0;n,p) + b(1;n,p) + b(2;n,p)$$

$$B(3;n,p) = b(0;n,p) + b(1;n,p) + b(2;n,p) + b(3;n,p)$$

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

ตัวอย่าง กำหนด p = 0.6 n = 10 จงหา p(X<=6)

B(r;n,p) = B(6; 10, 0.6) = **0.61772**

n	r	p								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
10	0	0.34868	0.10737	0.02825	0.00605	0.00098	0.00010	0.00001	0.00000	0.00000
	1	0.73610	0.37581	0.14931	0.04636	0.01074	0.00168	0.00014	0.00000	0.00000
	2	0.92981	0.67780	0.38278	0.16729	0.05469	0.01229	0.00159	0.00008	0.00000
	3	0.98720	0.87913	0.64961	0.38228	0.17188	0.05476	0.01059	0.00086	0.00001
	4	0.99837	0.96721	0.84973	0.63310	0.37695	0.16624	0.04735	0.00637	0.00015
	5	0.99985	0.99363	0.95265	0.83376	0.62305	[illegible]	0.15027	0.03279	0.00163
	6	0.99999	0.99914	0.98941	0.94524	0.82813	0.61772	0.35039	0.12087	0.01280
	7	1.00000	0.99992	0.99841	0.98771	0.94531	0.83271	0.61722	0.32220	0.07019
	8	1.00000	1.00000	0.99986	0.99832	0.98926	0.95364	0.85069	0.62419	0.26390
	9	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99902	0.99395	0.97175	0.89263	0.65132
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

ตัวอย่าง การทำข้อสอบปรนัย 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ จงหาความน่าจะเป็นที่จะทำข้อสอบถูกไม่เกิน 3 ข้อ

ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนข้อที่ทำถูก $x = 0, 1, 2, 3$

$p(x)$ = ความน่าจะเป็นที่ทำข้อสอบถูก = 0.2 ; $q = 0.8$

$p(x \leq 3) = B(r, n, p) = B(3, 5, 0.2) = \underline{0.99328}$

n	r	p								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
5	0	0.59049	0.32768	0.16807	0.07776	0.03125	0.01024	0.00243	0.00032	0.00001
	1	0.91854	0.73728	0.52822	0.33696	0.18750	0.08704	0.03078	0.00672	0.00046
	2	0.99144	0.94208	0.83692	0.68256	0.50000	0.31744	0.16308	0.05792	0.00856
	3	0.99954	0.99328	0.96922	0.91296	0.81250	0.66304	0.47178	0.26272	0.08146
	4	0.99999	0.99968	0.99757	0.98976	0.96875	0.92224	0.83193	0.67232	0.40951
	5	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

ตัวอย่าง ในการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญจำนวน 10 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เหรียญจะออกหัวไม่เกิน 5 ครั้ง

ให้ x คือ จำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$p(x)$ = ความน่าจะเป็นที่เหรียญออกหัว = 0.5

$p(x \leq 5) = B(5;10,0.5) = \mathbf{0.62305}$

2. เหรียญจะออกหัว 3 ครั้ง $x = 3$

$$p(x=3) = \underbrace{B(3;10,0.5)}_{0,\,1,\,2,\,3} - \underbrace{B(2;10,0.5)}_{0,\,1,\,2} = 0.17188 - 0.05469 = \underline{\mathbf{0.11719}}$$

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

กำหนด n = 20 ; p = 0.7

0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13

1. จงหา $p(x < 14)$ B(13,20,0.7) = **0.39199**

7-8-9-10-11-12-13-14-15

2. จงหา $p(7 \leq x < 16)$ 0.76249 B(15,20,0.7) − 0.00026 B(6,20,0.7) = **0.76223**

9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20

3. จงหา $p(x > 8)$ 1.0000 B(20,20,0.7) − 0.00514 B(8,20,0.7) = **0.99486**

4-5-6-7-8-9-10-11-12

4. จงหา $p(4 \leq x \leq 12)$ 0.22773 B(12,20,0.7) − 0.00000 B(3,20,0.7) = **0.22773**

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

ตัวอย่าง จากสถิติของกรมปศุสัตว์ พบว่า ถ้าสัตว์ปีกได้รับเชื้อไข้หวัดนก ความน่าจะเป็นที่สัตว์ปีกจะรอดชีวิตจากโรคไข้หวัดนกเท่ากับ 0.3 อยากทราบว่าถ้ามีสัตว์ปีกจำนวน 15 ตัวที่เป็นโรคไข้หวัดนก

1. p(สัตว์ปีกจะรอดชีวิตจากโรคไข้หวัดนก 5 ตัว) $x = 5$ $p = 0.3$; $n = 15$

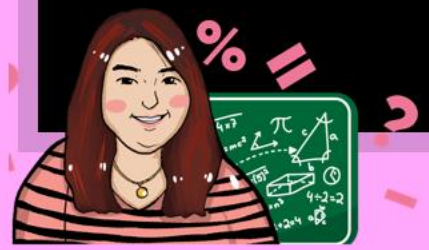
$$p(x=5) = \overset{0.72162}{B(5;15,0.3)} - \overset{0.51549}{B(4;15,0.3)} = \underline{\mathbf{0.206}}$$

2. p(สัตว์ปีกจะรอดชีวิตจากโรคไข้หวัดนก 3–8 ตัว) $x = 3,4,5,6,7,8$ $p = 0.3$; $n = 15$

$$p(3<=x<=8) = \overset{0.98746}{B(8;15,0.3)} - \overset{0.12683}{B(2;15,0.3)} = \underline{\mathbf{0.858}}$$

3. p(สัตว์ปีกจะเสียชีวิตจากโรคไข้หวัดนกไม่เกิน 7 ตัว) $x = 0,1,2,3,4,5,6,7$ $p = 0.7$; $n = 15$

$$p(x \leq 7) = \overset{0.05001}{B(7;15,0.7)} = \mathbf{0.05001}$$



การแจกแจงพหุนาม (Multinomial Distribution)

1 ลักษณะเด่น เป็นการทดลองที่แต่ละครั้งให้ผลลัพธ์ได้มากกว่า 2 อย่าง

2 ตัวอย่าง การทดลองสุ่มหยิบบอลจากกล่องที่บรรจุบอลหลากหลายสี

3 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k\,;\,p_1,p_2,\ldots,p_k) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,\ldots x_k!}\,p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$$

4 ค่าเฉลี่ย $\mu = E[X] = np_i$

5 ค่าความแปรปรวน $var(X) = var(X) = np_i(1-p_i)$

การแจกแจงพหุนาม (Multinomial Distribution)

ตัวอย่าง ในกล่องขนาดใหญ่บรรจุลูกบอลจำนวนมาก ซึ่งประกอบไปด้วยสีแดง สีขาว สีฟ้า และสีเหลือง ความน่าจะเป็นที่บอลลูกหนึ่ง ๆ จะเป็นสีดังกล่าวเป็น 0.4, 0.2, 0.3 และ 0.1 ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอล 5 ลูกที่สุ่มมาจากกล่องจะมีบอล 3 ลูกเป็นสีฟ้า อีก 2 ลูกเป็นสีขาว

กำหนด $x1$ = แดง, $x2$ = ขาว, $x3$ = ฟ้า, $x4$ = เหลือง

$p1 = 0.4$ $p2 = 0.2$ $p3 = 0.3$ $p4 = 0.1$

$$p(x1=0,x2=2,x3=3,x4=0) = \frac{5!}{0!\,2!\,3!\,0!}(0.4)^0\,(0.2)^2\,(0.3)^3\,(0.1)^0 = \underline{\mathbf{0.0108}}$$

การแจกแจงไฮเปอร์จีออเมตริก (Hypergeometric Dist.)

1 ลักษณะเด่น เป็นการทดลองสุ่มตัวอย่างขนาด n ชิ้นจากประชากรขนาด N ชิ้น โดยในกลุ่มประชากร N ชิ้น จะประกอบด้วยชิ้นที่เป็นความสำเร็จ k ชิ้น และชิ้นที่ล้มเหลว N−k ชิ้น

2 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$h(x\,;\,N,\,n,\,k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

3 ค่าเฉลี่ย $\mu = E[X] = np_i$

4 ค่าความแปรปรวน $var(X) = var(X) = np_i(1-p_i)$

การแจกแจงไฮเปอร์จีออเมตริก (Hypergeometric Dist.)

ตัวอย่าง กล่องบรรจุหลอดไฟฟ้าที่ใช้งานได้ดีจำนวน 40 หลอด หลอดเสียจำนวน 10 หลอด สุ่มหลอดไฟฟ้าขึ้นมาจำนวน 6 หลอด จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสียจำนวน 2 หลอด

กำหนดให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนหลอดไฟที่เสีย $x = 2$

ดี 40 →	ดี 4
เสีย 10 →	เสีย 2
50 →	6

$$P(x) = \frac{\binom{40}{4}\binom{10}{2}}{\binom{50}{6}} = \underline{0.2588}$$

การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

1 ลักษณะเด่น เป็นการทดลองสุ่มที่มีจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ เป็นอิสระกับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาอื่น

2 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$p(x\,;\,\mu) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!} \quad \text{เมื่อ } x = 0, 1, 2, \ldots$$

3 ค่าเฉลี่ย $\mu = E[X]$

4 ค่าความแปรปรวน $var(X) = \mu$

การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

<u>ตัวอย่างที่ 4-22</u> ถ้าในแต่ละวัน บนทางหลวงมีอุบัติเหตุเกิดขึ้นเฉลี่ยแล้วเท่ากับ 3 ราย (จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นมีการกระจายแบบปัวซอง)

1. จงหาความน่าจะเป็นที่วันนี้จะไม่มีอุบัติเหตุเกิดขึ้น

$\mu = 3$ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้น ; x = 0

$$p(X=0) = \frac{e^{-u}u^{x}}{x!} = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = \underline{0.04979} \sim \underline{0.0500}$$

2. ความน่าจะเป็นที่วันนี้จะมีอุบัติเหตุเกิดขึ้นไม่เกิน 2 ราย x = 0, 1, 2

$$p(X\leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} = 0.423$$

การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

<u>ตัวอย่างที่ 4-22</u> ถ้าในแต่ละวัน บนทางหลวงมีอุบัติเหตุเกิดขึ้นเฉลี่ยแล้วเท่ากับ 3 ราย (จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นมีการกระจายแบบปัวซอง) หน้า 77

2. ความน่าจะเป็นที่วันนี้จะมีอุบัติเหตุเกิดขึ้นไม่เกิน 2 ราย $p(X \leq r) = P(r ; u)$

$\mu = 3 \quad x = 0, 1, 2 \quad p(X \leq 2) = P(2 ; 3) = 0.423$

r	μ									
	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.607	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000
1	0.910	0.736	0.406	0.199	0.092	0.040	0.017	0.007	0.003	0.001
2	0.986	0.920	0.677	0.423	0.238	0.125	0.062	0.030	0.014	0.006
3	0.998	0.981	0.857	0.647	0.433	0.265	0.151	0.082	0.042	0.021

การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

ตัวอย่างที่ 4-22 อาคารจอดรถของร้านค้าแห่งหนึ่งรองรับจำนวนรถยนต์ได้มากที่สุด 20 คัน จากการสำรวจพบว่าในแต่ละวันเฉลี่ยแล้วจะมีรถยนต์เข้าจอด 15 คัน **หน้า 78**

ก) จงหาความน่าจะเป็นที่วันนี้มีรถมาใช้บริการที่ร้านแล้วไม่มีที่จอดรถ

วิธีทำ $\mu = 15$

$$p(X>20) = 1 - p(X\leq 20) = 1 - P(20;15) = 1 - 0.917 = \underline{\mathbf{0.083}}$$

ข) จงหาความน่าจะเป็นที่มีรถมาจอดที่อาคารจอดรถมากกว่า 10 คัน 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

วิธีทำ $p(10<X\leq 20) = \overset{0.917}{P(20;15)} - \overset{0.118}{P(10;15)} = \underline{\mathbf{0.799}}$

QUIZ 4

พิมพ์คำตอบใส่ใน Google form

Z Y X คือเลข 3 ตัวท้ายรหัสนิสิต

โดยที่ X คือ ตัวท้ายสุด

ส่งภายใน 16.30 น.

QUIZ 4.2	ชื่อ-สกุล		รหัส		เลขที่	

โจทย์ข้อ 1-5 หน่วยงานสาธารณสุขได้รับแจ้งว่ามีการระบาดของเชื้อโควิด-19 ในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง จึงส่งเจ้าหน้าที่ไปตรวจชาวบ้านที่เป็นกลุ่มที่มีความเสี่ยงสูงจำนวน 20 คน ซึ่งโดยปกติกลุ่มที่มีความเสี่ยงสูงจะมีโอกาสติดเชื้อโควิด-19 ด้วยความน่าจะเป็น 0.8 (ให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

1. จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ติดเชื้อไม่ถึง 6+Z คน
2. จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ติดเชื้อมากกว่า Y คน แต่ไม่เกิน Y+11 คน
3. จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ติดเชื้อมากกว่า Z+7 คน
4. จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ติดเชื้อตั้งแต่ 9 คน ถึง 9+X
5. จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ไม่ติดเชื้อไม่น้อยกว่า 5+Y คน

โจทย์ข้อ 6-9 เจ้าหน้าที่ตรวจสอบคุณภาพของบริษัทผลิตแผ่นไม้แห่งหนึ่ง พบว่า โดยปกติแผ่นไม้ 1 ตารางเมตร จะพบรอยตำหนิโดยเฉลี่ย 3+Y จุด (ให้ใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

6. ในการตรวจแผ่นไม้ขนาด 1 ตารางเมตร จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบรอยตำหนิน้อยกว่า 5+Z จุด
7. ในการตรวจแผ่นไม้ขนาด 1 ตารางเมตร จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบรอยตำหนิตั้งแต่ X จุด แต่ไม่เกิน X+6 จุด
8. ในการตรวจแผ่นไม้ขนาด 2 ตารางเมตร จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบรอยตำหนิไม่น้อยกว่า X+12 จุด
9. ในการตรวจแผ่นไม้ขนาด 2 ตารางเมตร จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบรอยตำหนิมากกว่า 7 จุด แต่ไม่ถึง 10+Y จุด

10. กล่องบรรจุสินค้า 100 ชิ้น โดยปกติจะมีสินค้าเสียปะปนอยู่ (15+Y)% วิศวกรคุณภาพสุ่มสินค้าขึ้นมาจากกล่องเพื่อทำการตรวจสอบจำนวน 15 ชิ้นพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สินค้าดีจำนวน 4+Z ชิ้น (ทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

พิมพ์คำตอบใส่ใน Google form

Z Y X คือเลข 3 ตัวท้ายรหัสนิสิต
โดยที่ X คือ ตัวท้ายสุด

ส่งภายในวันที่ 6 ส.ค. 64
ก่อนเวลา 20.00 น.