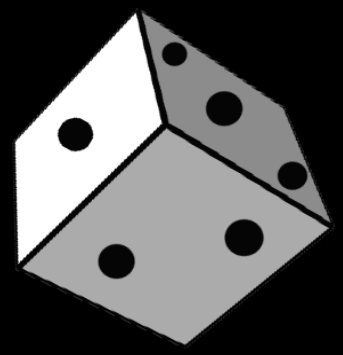
บทที่ 3

ตัวแปรสุ่ม
และการคาดคะเนทางคณิตศาสตร์



กานต์ ศุภจิตกุล วิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ ม.นเรศวร

ตัวแปรสุ่ม

ฟังก์ชันหรือลักษณะต่าง ๆ ที่นิยามขึ้นจากผลการทดลองสุ่มใด ๆ โดยปกติแล้ว ตัวแปรสุ่มจะปรากฏเป็นค่าเชิงตัวเลขที่ได้จากจุดตัวอย่างจุดต่าง ๆ ในแซมเปิลสเปซ ของการทดลอง ตัวแปรสุ่มจะแทนด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กแทนค่าของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> การตรวจคุณภาพสินค้าชนิดหนึ่ง

ให้ y เป็นตัวแปรสุ่มแทนคุณภาพสินค้าที่ตรวจพบ

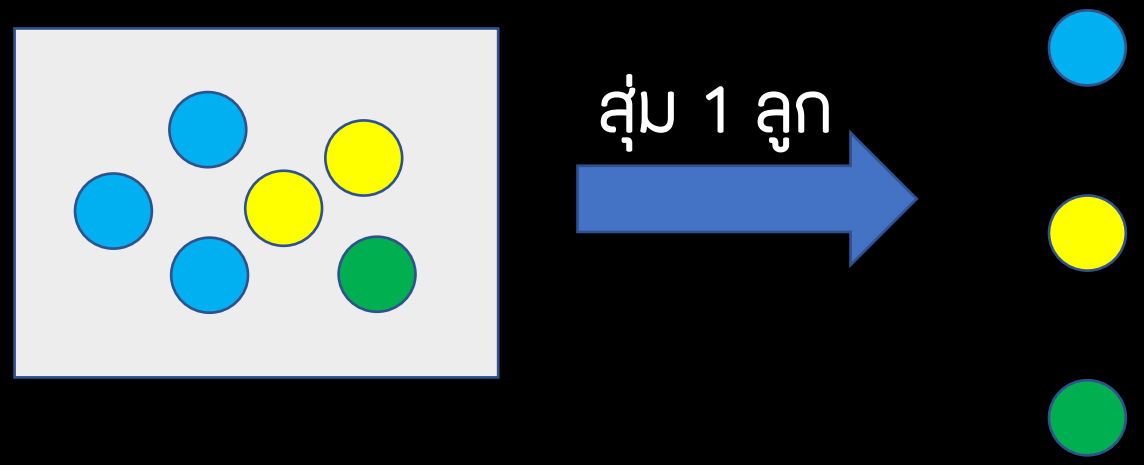
y = { ดี , เสีย }

y = {0,1} เมื่อ 0 แทนสินค้าดี และ 1 แทนสินค้าเสีย

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 1 ลูก จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทน สีของลูกบอลที่สุ่มได้

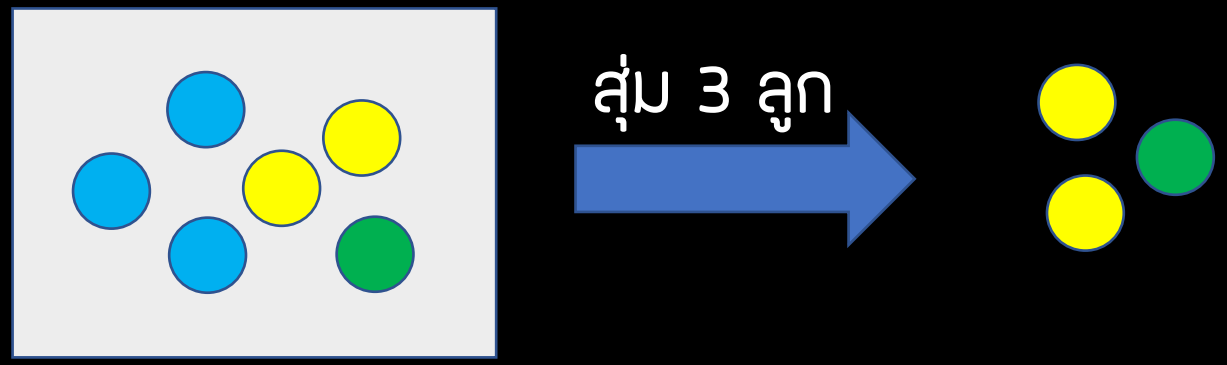


X = { ฟ้า, เหลือง, เขียว }

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ y เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



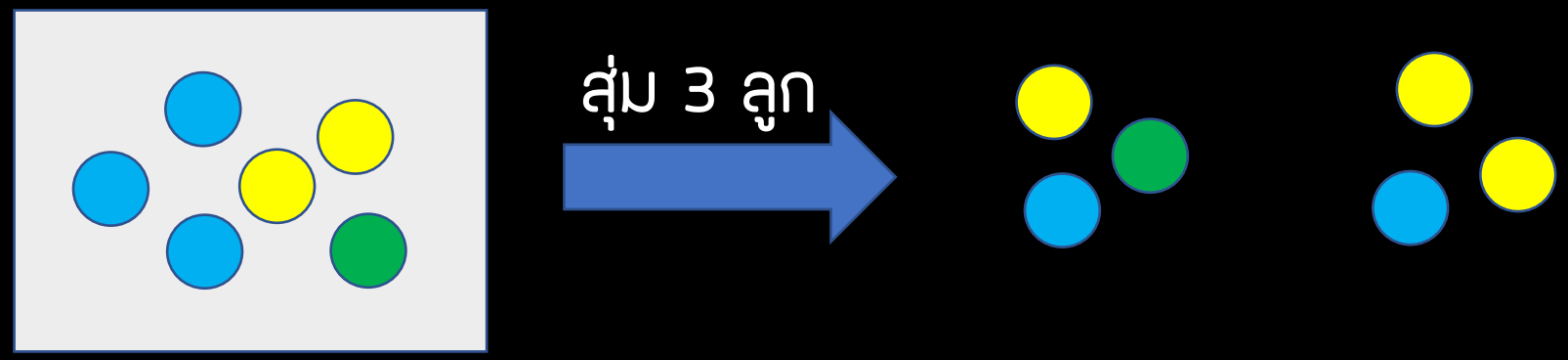
ฟ้า = 0

y = { 0

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ y เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



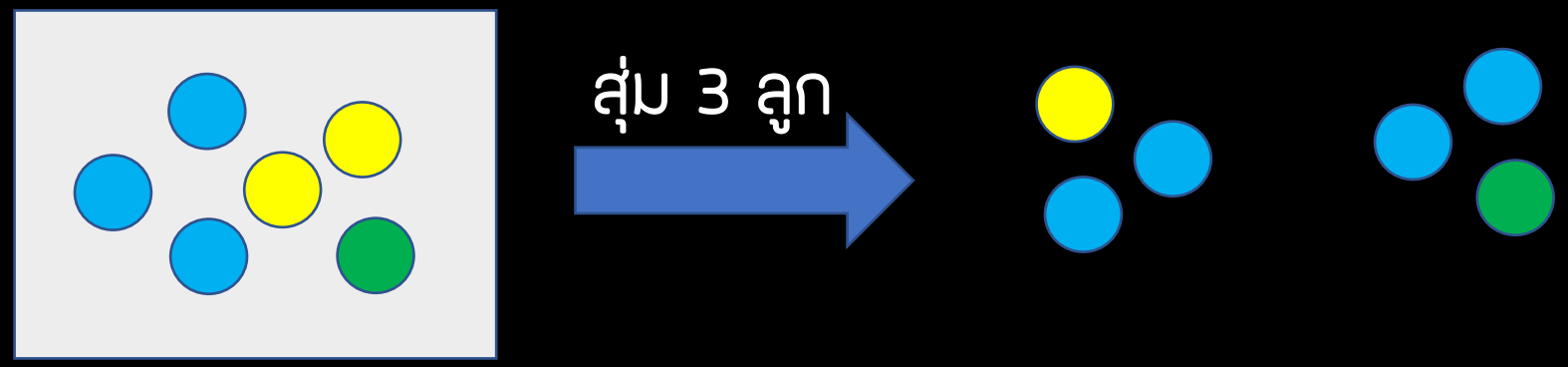
ฟ้า = 1

y = { 0 , 1

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ y เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



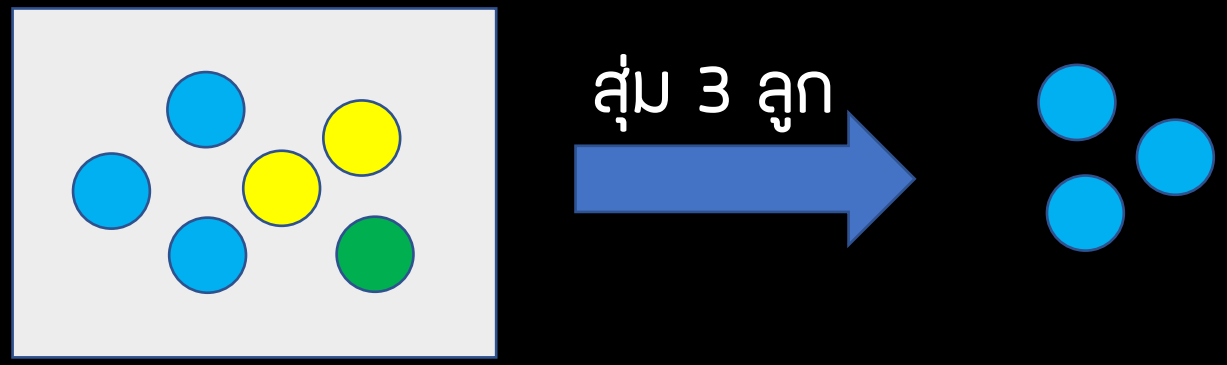
ฟ้า = 2

y = { 0 , 1 , 2

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ y เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



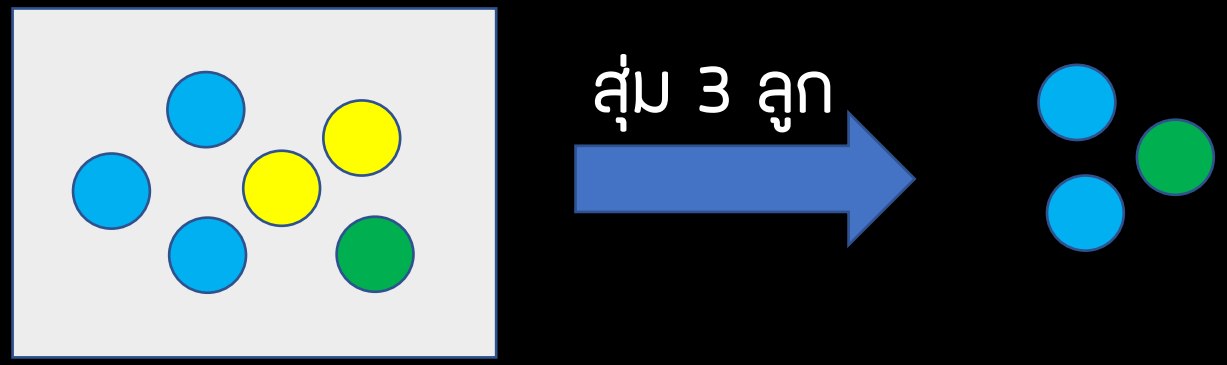
ฟ้า = 3

$y = \{0, 1, 2, 3\}$

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้



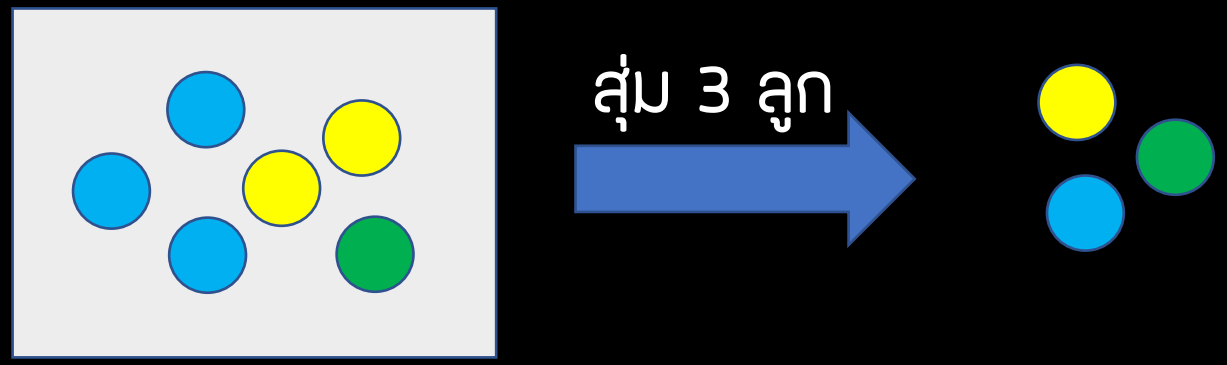
เหลือง = 0

x = { 0

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้



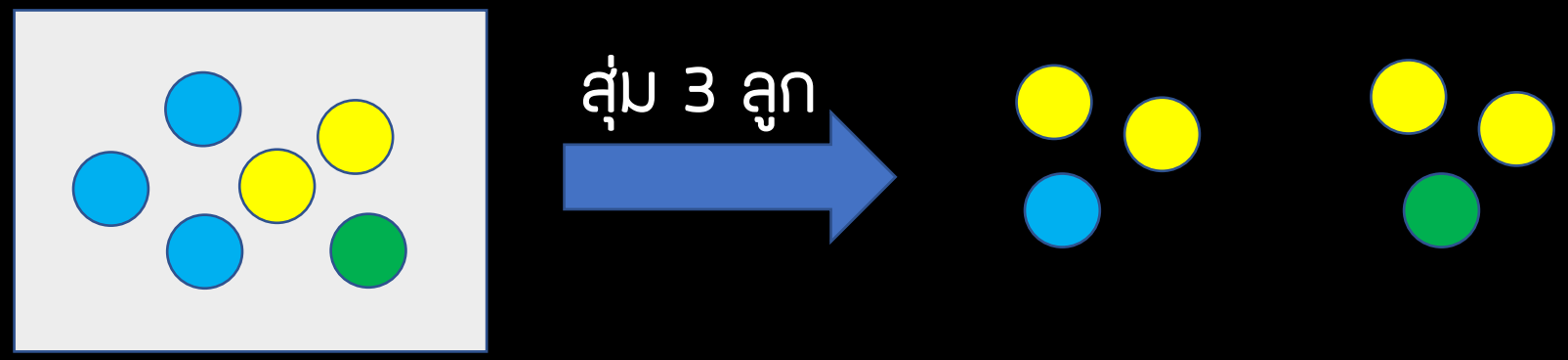
เหลือง = 1

x = { 0 , 1

ตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้



เหลือง = 2

$x = \{0, 1, 2\}$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> โยนลูกเต๋า 1 ลูก

ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทน แต้มที่ได้ → x = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

สรุป

การทดลองสุ่ม — โยนลูกเต๋า 1 ลูก

↓

ตัวแปรสุ่ม — $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

↓

ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

↓

ตรวจสอบสมบัติ

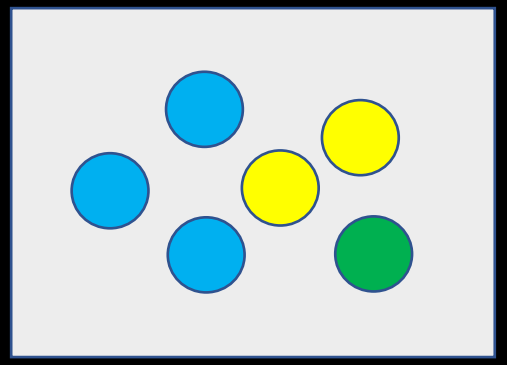
1. $f(x_i) \geq 0$ ทุก ๆ ค่าของ i
2. $\sum f(x_i) = 1$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 1 ลูก จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก สีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทน สีของลูกบอลที่สุ่มได้

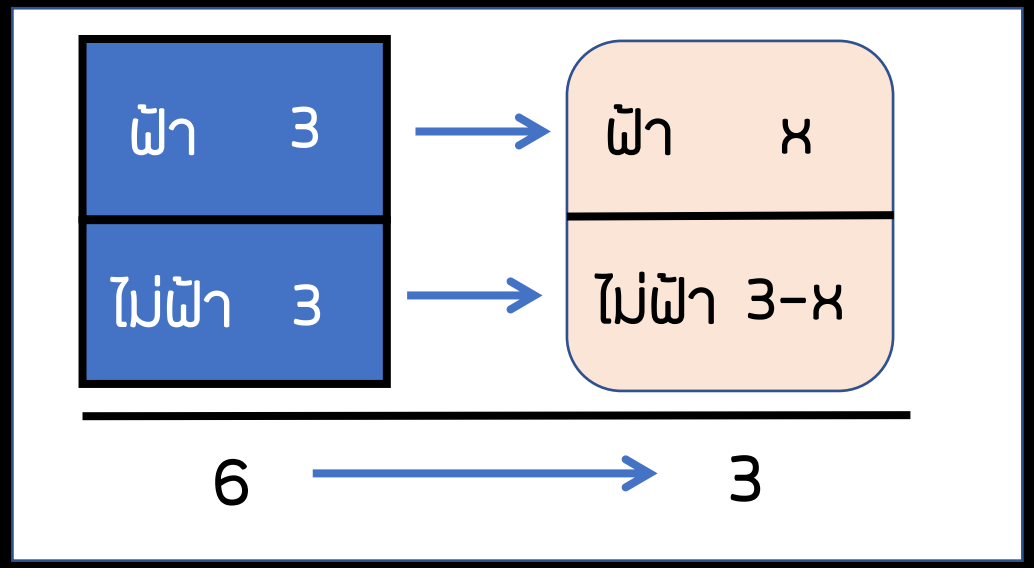
X = { ฟ้า, เหลือง, เขียว }



X	ฟ้า	เหลือง	เขียว
f(X)	3/6	2/6	1/6

1. $f(x_i) \geq 0$ ทุก ๆ ค่าของ i
2. $\sum f(x_i) = 1$

ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอลฟ้า 3 ลูก เหลือง 2 ลูก เขียว 1 ลูก



ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนบอลสีฟ้าที่ได้

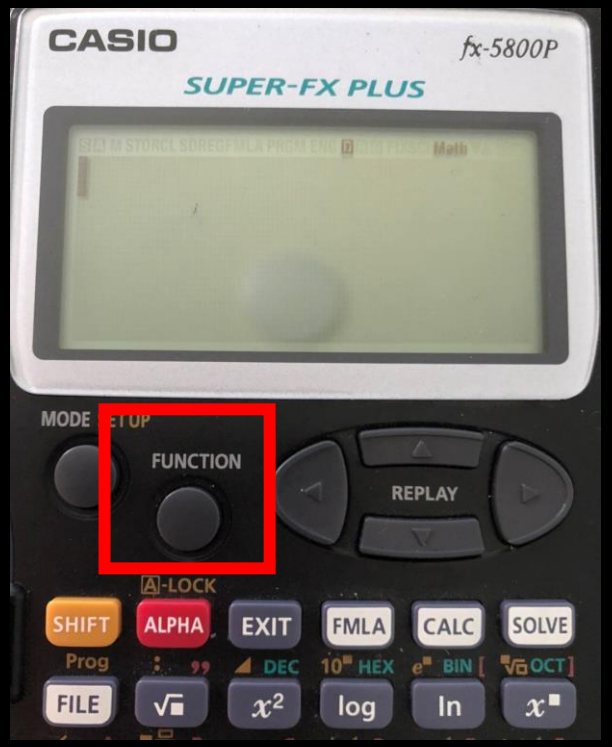
$x = \{ 0 , 1 , 2 , 3 \}$

$$f(x) = \frac{\begin{array}{cc} \text{ฟ้า} & \text{ไม่ฟ้า} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3-x \end{bmatrix} \end{array}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

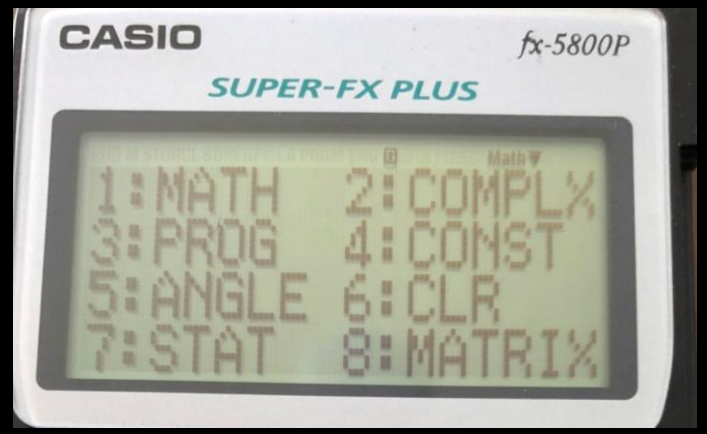
x	0	1	2	3
f(x)				

การหาค่า $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

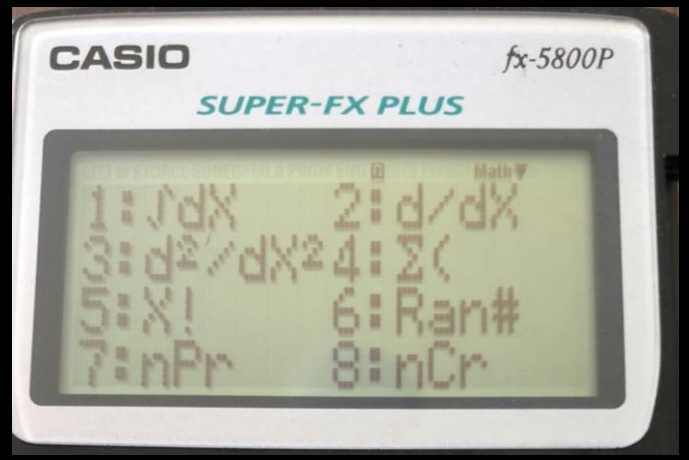


1. กด function

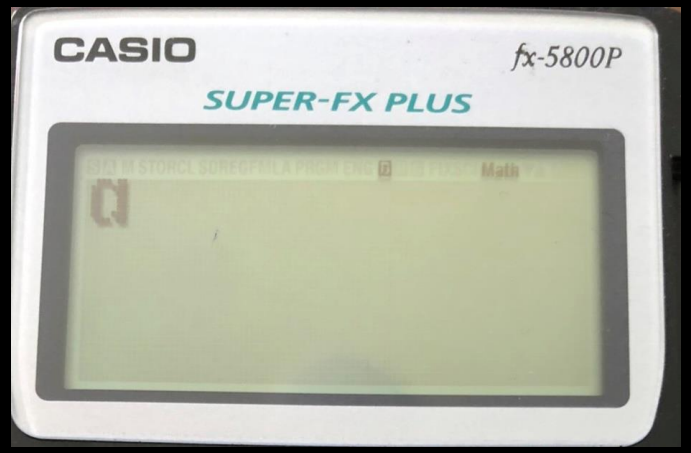
2. กด 1



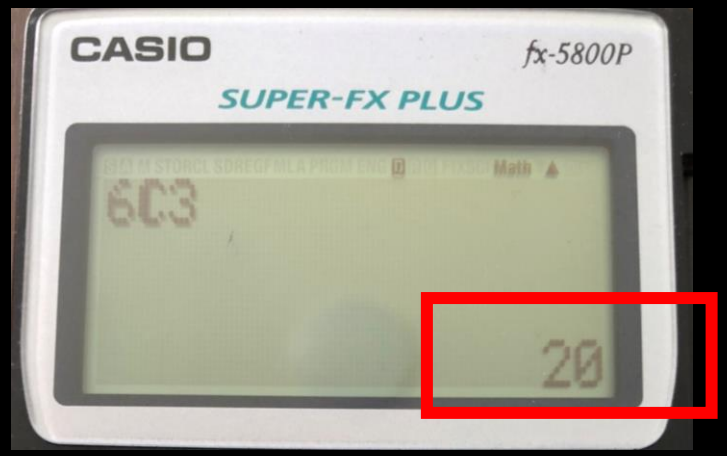
3. กด 8



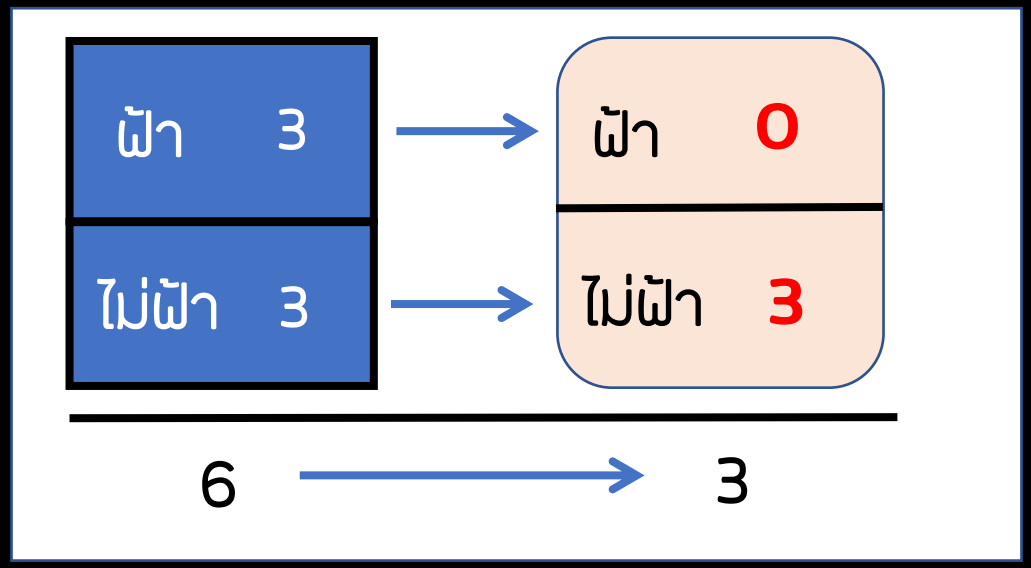
หน้าจอขึ้น C



4. พิมพ์ 6 C 3 กด EXE



ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอลฟ้า 3 ลูก เหลือง 2 ลูก เขียว 1 ลูก



ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนบอลสีฟ้าที่ได้

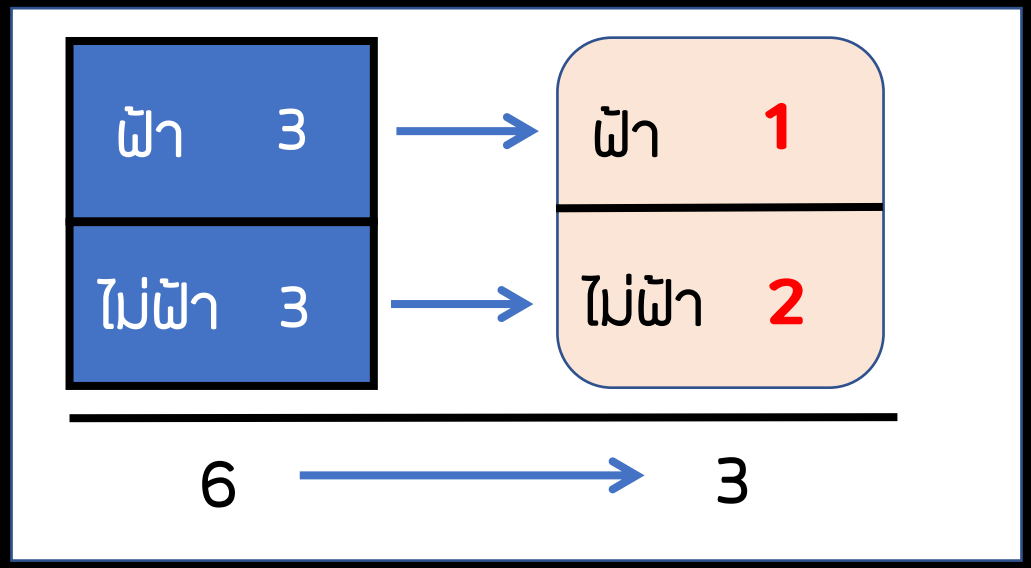
$x = \{ 0 , 1 , 2 , 3 \}$

$$f(x) = \frac{\overset{\text{ฟ้า}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}} \overset{\text{ไม่ฟ้า}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}} = 1/20$$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

x	0	1	2	3
f(x)	1/20			

ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอลฟ้า 3 ลูก เหลือง 2 ลูก เขียว 1 ลูก



ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนบอลสีฟ้าที่ได้

$x = \{ 0 , 1 , 2 , 3 \}$

$$f(x) = \frac{\begin{array}{cc} \text{ฟ้า} & \text{ไม่ฟ้า} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}} = 9/20$$

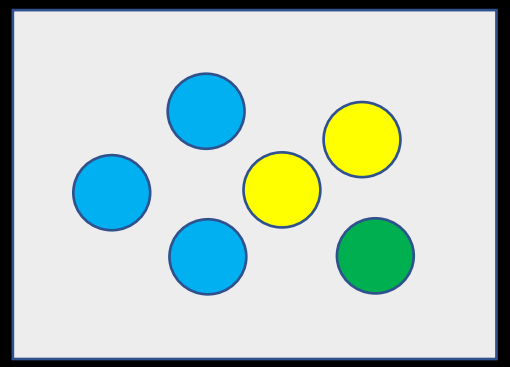
ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

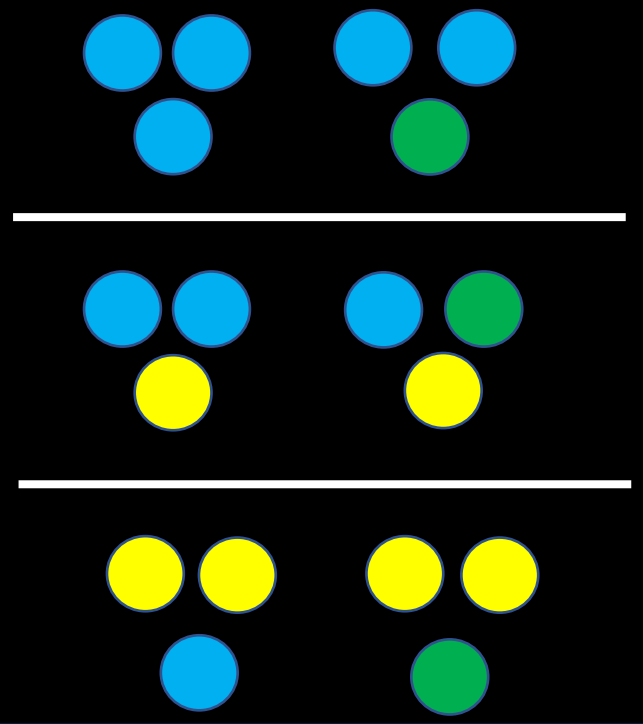
x	0	1	2	3
f(x)	1/20	9/20	9/20	1/20

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้ $x = \{0, 1, 2\}$





x	0	1	2
f(x)	4/20	12/20	4/20

$$f(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{6}{3}}$$

ตัวอย่าง การทดลองสุ่มโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน

S = { (1,1) , (1,2) , (1,3) , ... , (6,5) , (6,6) } n(S) = 36

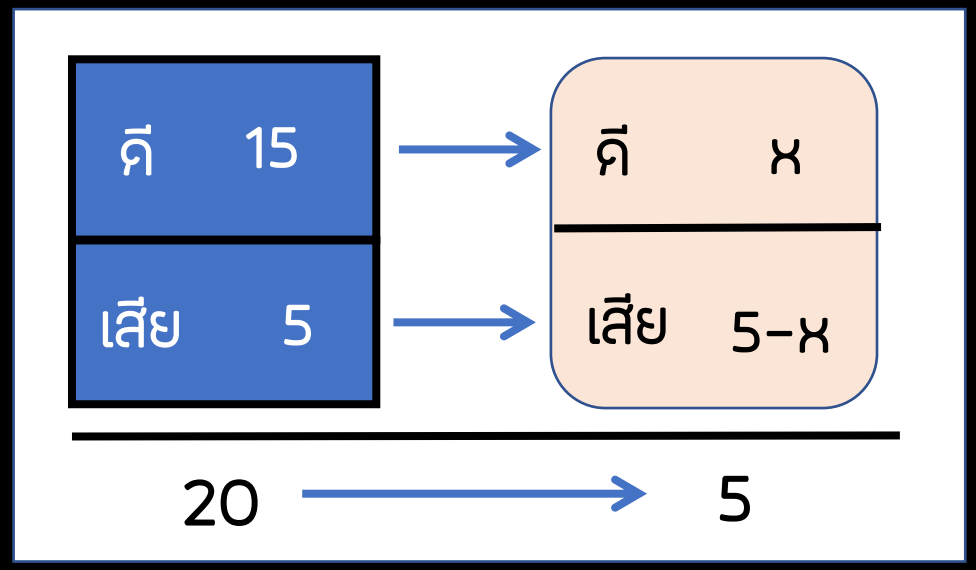
กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนผลลัพธ์ที่ได้จากการบวกแต้มบนลูกเต๋าทั้งสอง

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
F(x)	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

<u>ตัวอย่าง</u> กล่องบรรจุสินค้า 20 ชิ้น เป็นสินค้าคุณภาพดี 15 ชิ้น และเป็นสินค้าเสีย 5 ชิ้น ทำการสุ่มตัวอย่างสินค้าในกล่องจำนวน 5 ชิ้น ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนสินค้าคุณภาพดีที่สุ่มได้ จงหาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ x



กำหนดให้ x เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนสินค้าดีที่สุ่มได้ ;

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$f(x) = \frac{\binom{15}{x}\binom{5}{5-x}}{\binom{20}{5}}$$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1/15504	75/15504	1050/15504	4550/15504	6825/15504	3003/15504

ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม (Expected Value)

$$E[x] = \sum x\, f(x)$$

ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม (Variance Value)

$$Var(x) = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2 = \boxed{E[x^2] - (E[x])^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าคาดหวัง จากแต้มที่ได้จากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มของแต้มที่ได้จากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก

$X = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

ค่าของตัวแปรสุ่ม X	1	2	3	4	5	6
ความน่าจะเป็น f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E[X] = (1)(1/6) + (2)(1/6) + (3)(1/6) + (4)(1/6) + (5)(1/6) + (6)(1/6) = 21/6 = 3.5$$

<u>ตัวอย่างเพิ่มเติม</u> จากตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

X	−2	−1	0	1	3	5
f(x)	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2

1. $E[X] = (-2)(0.1) + (-1)(0.2) + (0)(0.1) + (1)(0.3) + (3)(0.1) + (5)(0.2)$ **= 1.2**

2. $E[X^2] = (-2)^2(0.1) + (-1)^2(0.2) + (0)^2(0.1) + (1)^2(0.3) + (3)^2(0.1) + (5)^2(0.2)$ **= 6.8**

3. $var[X] = E[X^2] - (E[x])^2 = 6.8 - (1.2)^2$ **= 5.36**

สมบัติของค่าคาดหวัง $E[x]$ ของตัวแปรสุ่ม

1. $E[g(x)] = \sum g(x)f(x)$ เมื่อ x เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

2. ถ้า C เป็นค่าคงที่ $E[C] = C$ เช่น $E[5] = 5$

3. ถ้า C เป็นค่าคงที่ $E[C\,u(x)] = C\,E[u(x)]$ เช่น $E[5x] = 5\,E[x]$

4. $E[u(x) \pm v(x)] = E[u(x)] \pm E[v(x)]$

เช่น $E[5x^2+2x+1] = E[5x^2] + E[2x] + E[1] = \mathbf{5E[x^2] + 2E[x] + 1}$

ตัวอย่างเพิ่มเติม จากตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม x

x	−3	−1	0	1	2
f(x)	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

1. จงหา $E[2x^2+3x-6]$

2. $var[x-3]$

$$E[x] = (-3)(0.1) + (-1)(0.3) + (0)(0.2) + (1)(0.3) + (2)(0.1) = -0.1$$

$$E[x^2] = (-3)^2(0.1) + (-1)^2(0.3) + (0)^2(0.2) + (1)^2(0.3) + (2)^2(0.1) = 1.9$$

1. $E[2x^2+3x-6] = E[2x^2] + E[3x] - E[6] = 2\overset{1.9}{E[x^2]} + 3\overset{-0.1}{E[x]} - 6 = -2.5$

2. $var[x-3] = E[(x-3)^2] - (E[x-3])^2 = E[x^2-6x+9] - (E[x]-3])^2$

$$= \overset{1.9}{E[x^2]} - 6\overset{-0.1}{E[x]} + 9 - (\overset{-0.1}{E[x]}-3])^2 = 11.5 - 9.61 = 1.89$$

ตัวอย่างเพิ่มเติม จากตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

X	−25	−10	0	22	35
F(x)	0.15	0.40	0.68	0.86	1.00
f(x)	**0.15**	**0.25**	**0.28**	**0.18**	**0.14**

1. จงหา $E[3X^2+5X-1]$
2. $var[2X-1]$

$$E[X] = (-25)(0.15)+(-10)(0.25)+(0)(0.28)+(22)(0.18)+(35)(0.14) = \mathbf{2.61}$$

$$E[X^2] = (-25)^2(0.15)+(-10)^2(0.25)+(0)^2(0.28)+(22)^2(0.18)+(35)^2(0.14) = \mathbf{377.4}$$

1. $E[3X^2+5X-1] = E[3X^2]+E[5X]-E[1] = 3\overset{377.4}{E[X^2]}+5\overset{2.61}{E[X]}-1 = \mathbf{1144.16}$

2. $var[2X-1] = E[(2X-1)^2]-(E[2X-1])^2 = E[4X^2-4X+1]-(2E[X]-1])^2$

$$= 4\overset{377.4}{E[X^2]}-4\overset{2.61}{E[X]}+1-(2\overset{2.61}{E[X]}-1])^2 = 1500.16-17.81 = \mathbf{1482.35}$$

<u>ตัวอย่างเพิ่มเติม</u> นายนูนเญซต้องการทำเกมส์ให้เพื่อนเล่นด้วยการเสี่ยงดวง โดยเขาทำสลากขึ้นมา 10 ใบ เป็นเลข 0–9 การเล่นคือให้เพื่อนสุ่มหยิบสลากขึ้นมา 1 ใบ ถ้าได้เลข 5 เพื่อนได้เงิน 20 บาท ถ้าได้เลข 1 กับเลข 9 ได้เงิน 10 บาท นอกนั้นไม่ได้เงิน ถ้าให้เกมส์นี้ไม่เสียเปรียบ เขาควรเก็บค่าเล่นเกมส์เพื่อนครั้งละกี่บาท

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนเงินรางวัล

$X = \{ 0 , 10 , 20 \}$

0 2 3 4 6 7 8 1 9 5

X	0	10	20
f(x)	7/10	2/10	1/10

$E[X] = (0)(7/10) + (10)(2/10) + (20)(1/0) = 4$

เงินรางวัลที่ต้องจ่ายโดยเฉลี่ยเท่ากับ 4 บาท ดังนั้นเขาควรเก็บค่าเล่นเกมส์อย่างน้อยเกมส์ละ 4 บาท

สลากกินแบ่งรัฐบาล

รางวัลที่ 1	ข้างเคียง	รางวัลที่ 2	รางวัลที่ 3	รางวัลที่ 4	รางวัลที่ 5	หน้า 3 ตัว	ท้าย 3 ตัว	2 ตัว	ไม่ถูก
6,000,000	100,000	200,000	80,000	40,000	20,000	4,000	4,000	2,000	0
$\frac{1}{1,000,000}$	$\frac{2}{1,000,000}$	$\frac{5}{1,000,000}$	$\frac{10}{1,000,000}$	$\frac{50}{1,000,000}$	$\frac{100}{1,000,000}$	$\frac{1,000}{1,000,000}$	$\frac{1,000}{1,000,000}$	$\frac{10,000}{1,000,000}$	$\frac{987,832}{1,000,000}$

$$E[X] = (6,000,000 \times 0.000001) + (1000,000 \times 0.000002)$$
$$+ (2000,000 \times 0.000005) + (80,000 \times 0.00001) + (40,000 \times 0.00005)$$
$$+ (20,000 \times 0.0001) + (4,000 \times 0.0001) + (4,000 \times 0.0001)$$
$$+ (2,000 \times 0.001)$$
$$= 40$$