บทที่ 7

การทดสอบสมมติฐาน

(Hypothesis Testing)

สมมติฐาน (Hypothesis)

สมมติฐาน หมายถึง เกณฑ์หรือข้อตกลงที่ตั้งขึ้นเพื่อการพิสูจน์ ให้เกิดการยอมรับหรือการปฏิเสธ ซึ่งการยอมรับหรือการปฏิเสธจะเกิดจากผลของการสุ่มตัวอย่างและการทดสอบสมมติฐานตามเกณฑ์ที่ตั้งขึ้นนั้น

การตั้งสมมติฐาน

1. สมมติฐานหลัก (Null Hypothesis ; H_0)

สมมติฐานที่ตั้งขึ้นเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่ทราบค่าที่แน่นอน

มักจะเป็นสมมติฐานที่ตั้งขึ้นเพื่อต้องการปฏิเสธ

เช่น มีคนบอกว่านิสิต ม.นเรศวรมีส่วนสูงเฉลี่ย 165 เซนติเมตร

$$H_0 : \mu = 165$$

2. สมมติฐานรอง (Alternative Hypothesis ; H_1)

2.1 สมมติฐานรองแบบทางเดียว (one-tailed)

เช่น นายโจคิดว่านิสิต ม.นเรศวรน่าจะมีส่วนสูง มากกว่า 165 ซม.

$$H_1 : \mu > 165$$

2.2 สมมติฐานรองแบบสองทาง (two-tailed)

เช่น นายโจคิดว่านิสิต ม.นเรศวรน่าจะมีส่วนสูงไม่เท่ากับ 165 ซม.

$$H_1 : \mu \neq 165$$

ตัวอย่างการตั้งสมมติฐาน

1. บริษัทผู้ผลิตกาแฟสำเร็จรูป ตั้งเครื่องจักรให้บรรจุปริมาณกาแฟในแต่ละกระป๋องโดยเฉลี่ยเท่ากับ 36 ออนซ์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 3.4 บริษัทต้องการทดสอบว่าเครื่องจักรทำงานปกติหรือไม่

$H_0 : \mu = 36$ เครื่องจักรทำงานปกติ

$H_1 : \mu \neq 36$ เครื่องจักรทำงานไม่ปกติ

2. การตรวจสอบคุณภาพอาหารกระป๋อง กำหนดเกณฑ์ไว้ว่า อาหารกระป๋องจะมีแบคทีเรียเฉลี่ยไม่เกิน 62.0 หน่วย ต้องการทดสอบว่า อาหารกระป๋องยี่ห้อหนึ่งมีคุณภาพตามเกณฑ์หรือไม่

$H_0 : \mu = 62.0$ มีคุณภาพตามเกณฑ์

$H_1 : \mu > 62.0$ ไม่มีคุณภาพตามเกณฑ์

3. สุ่มจับไส้เดือน จำนวน 8 ตัว จากที่ดินแปลงหนึ่ง มาทำการวัดความยาวมีหน่วยเป็นนิ้ว ได้ค่าดังนี้

6.2 7.5 5.8 6.2 4.1 6.8 6.2 6.0

จะสรุปได้หรือไม่ว่า ไส้เดือนจะมีความยาวเฉลี่ย 6 นิ้ว ที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

$H_0 : \mu = 6$

$H_1 : \mu \neq 6$

4. น้ำหนักมาตรฐานของกล่องบรรจุอาหารเสริมชนิดหนึ่ง กำหนดไว้ไม่ให้ต่ำกว่า 10 ออนซ์ ถ้าสุ่มตัวอย่างกล่องขึ้นมา 10 กล่อง ชั่งน้ำหนักได้ค่าดังนี้

10.2, 9.7, 10.1, 9.3, 9.2, 9.8, 9.9, 10.1, 10.3 และ 9.8

จงทดสอบว่าการผลิตยังเป็นไปตามมาตรฐานหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

$$H_0 : \mu = 10$$

$$H_1 : \mu < 10$$

5. ในการทดสอบความแข็งของเหล็ก วิศวกรควบคุมคุณภาพของบริษัทได้ทำการสุ่มเหล็ก AA และเหล็ก BB อย่างละ 10 ชิ้น มาทดสอบความแข็ง ทำการบันทึกค่าไว้ ได้ผลทั้งหมดดังตาราง

เหล็ก AA	62	55	43	50	49	43	51	52	56	54
เหล็ก BB	45	47	51	42	52	47	46	48	47	45

5.1 อยากทราบว่า <u>เหล็กชนิด BB มีความแข็ง*มากกว่าเหล็ก AA*</u> *หรือไม่*

$$H_0: \mu_{AA} = \mu_{BB}$$

$$H_1: \mu_{AA} < \mu_{BB}$$

5.2 อยากทราบว่า เหล็กชนิด AA และ BB มีความแข็ง<u>*แตกต่างกัน*</u>*หรือไม่*

$$H_0: \mu_{AA} = \mu_{BB}$$

$$H_1: \mu_{AA} \neq \mu_{BB}$$

6. ในการวัดประสิทธิภาพการอบรม "กฎจราจร" ว่าการอบรมจะช่วยให้นิสิตมีความรู้เรื่องกฎจราจรเพิ่มขึ้นหรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 โดยให้นิสิตทำแบบทดสอบก่อนอบรมและหลังอบรม จากนั้นทำการบันทึกค่าไว้ ได้ผลทั้งหมดดังตาราง

ก่อนอบรม	21	24	19	22	23	18	21	20	17	23
หลังอบรม	32	26	30	39	31	29	30	36	34	33

$$H_0 : \mu_{\text{ก่อน}} = \mu_{\text{หลัง}}$$

$$H_1 : \mu_{\text{หลัง}} > \mu_{\text{ก่อน}}$$

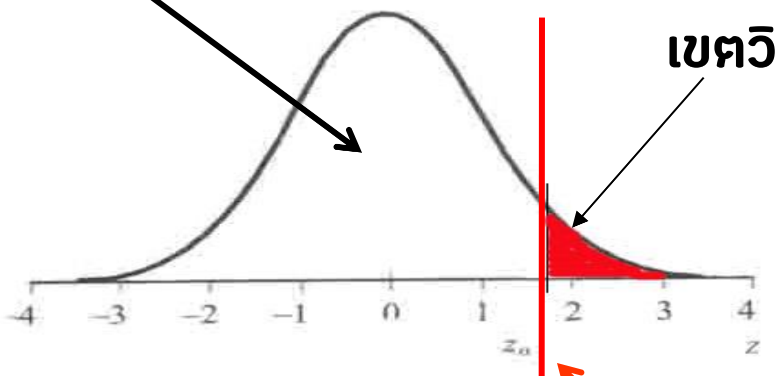
ภาพรวมการทดสอบสมมติฐาน

ตั้งสมมติฐาน

$H_0 : \mu = 165$

$H_1 : \mu > 165$

เขต**ยอมรับ HO** (accept region)



เขตวิกฤติ (critical region)

เปิดตาราง t , Z สร้างเขต

คำนวณค่า t , Z

สรุปผล

t ตกสีขาว เลือก HO

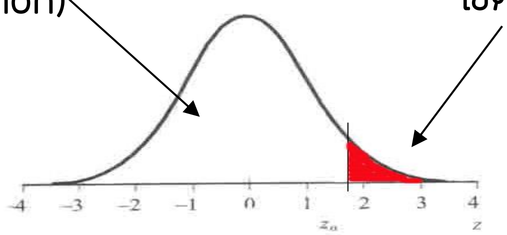
t ตกสีแดง เลือก H1

ช่วงของการยอมรับ (accept region) และ เขตวิกฤต (critical region)

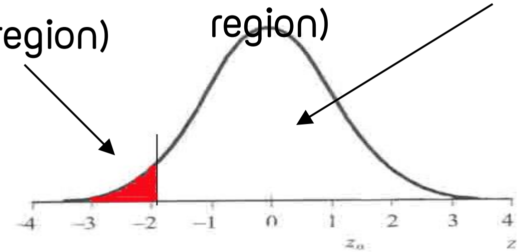
กรณีสมมติฐานรองแบบทางเดียว (one-tailed)

เขตยอมรับ (accept region)

เขตวิกฤติ (critical region)



เขตยอมรับ (accept region)

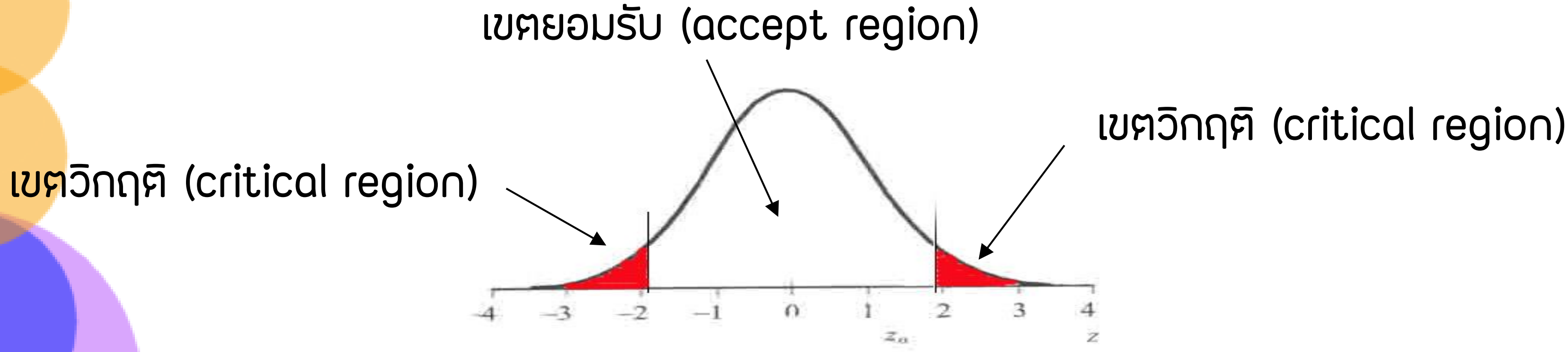


$H_1 : \mu > 165$

$H_1 : \mu < 165$

ช่วงของการยอมรับ (accept region) และ เขตวิกฤต (critical region)

กรณีสมติฐานรองแบบสองทาง (two-tailed)



$H_1 : \mu \neq 165$

การทดสอบสมมติฐาน

1. ตั้งสมมติฐานหลัก (H_o) $H_o : \mu = 165$

2. ตั้งสมมติฐานรอง (H_1)

Two-tailed $H_1 : \mu \neq 165$

One-tailed $H_1 : \mu < 165$

$H_1 : \mu > 165$

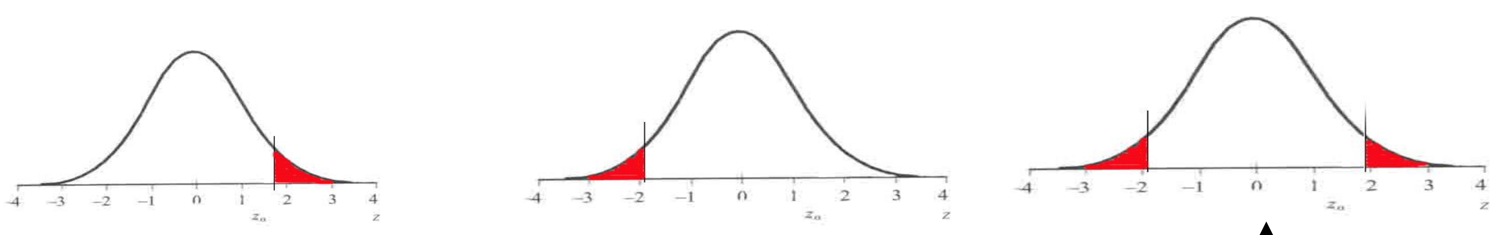
3. กำหนดระดับนัยสำคัญ

α

การทดสอบสมมติฐาน

4. กำหนดค่าสถิติที่จะใช้ (เลือกสูตร) Z หรือ t

5. สร้างเขตวิกฤติ



One-tailed

Two-tailed

การทดสอบสมมติฐาน

6. คำนวณค่าสถิติในข้อ 4 จะได้ $Z_{\text{คำนวณ}}$ หรือ $t_{\text{คำนวณ}}$

7. ทดสอบสมมติฐาน และสรุปผล

7.1 ถ้า $Z_{\text{คำนวณ}}$ หรือ $t_{\text{คำนวณ}}$ ตกในเขตวิกฤต ให้ reject H_0 และ accept H_1

7.2 ถ้า $Z_{\text{คำนวณ}}$ หรือ $t_{\text{คำนวณ}}$ ตกนอกเขตวิกฤต ให้ accept H_0

การทดสอบความแปรปรวน

$H_0 : \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

S_1^2 ต้องเป็นค่ามาก

สูตรที่ใช้ $F_{\text{คำนวณ}} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

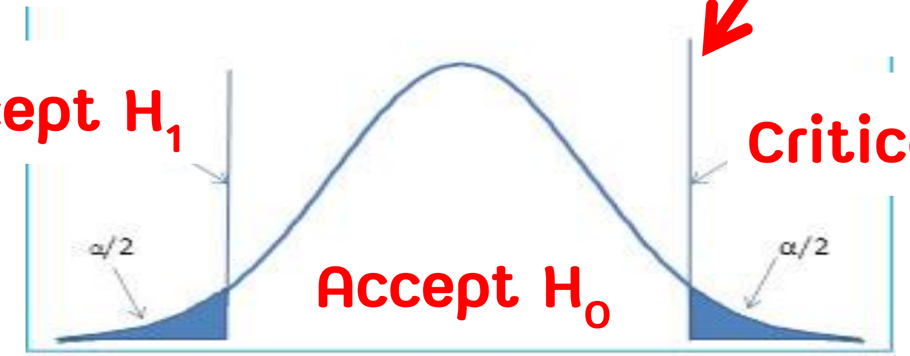
$F_{\alpha/2,v1,v2}$

โดย $v1 = n1 - 1$

$v2 = n2 - 1$

Critical : Accept H_1

Critical : Accept H_1



Accept H_0

เนื่องจาก F เป็นค่าบวก ดังนั้น สรุปได้ว่า

ถ้า $F_{\text{คำนวณ}} > F_{\text{ตาราง}}$ ตกในเขตวิกฤต ยอมรับ H1 -- ความแปรปรวนไม่เท่ากัน สูตร 7

ถ้า $F_{\text{คำนวณ}} < F_{\text{ตาราง}}$ ตกนอกเขตวิกฤต ยอมรับ H0 -- ความแปรปรวนเท่ากัน สูตร 6

ตัวอย่าง 1

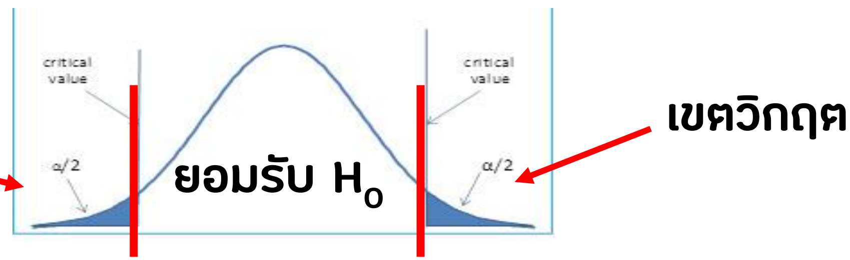
บริษัทผู้ผลิตกาแฟสำเร็จรูป ตั้งเครื่องจักรให้บรรจุปริมาณกาแฟในแต่ละกระป๋องโดยเฉลี่ย 36 ออนซ์ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 3.4 บริษัทต้องการทดสอบว่า เครื่องจักรทำงานปกติหรือไม่ จึงสุ่มตัวอย่างกาแฟกระป๋องมา 49 กระป๋อง พบว่า มีปริมาณกาแฟเฉลี่ย 35.1 ออนซ์ บริษัทจะสรุปอย่างไร

บริษัทผู้ผลิตกาแฟสำเร็จรูป ตั้งเครื่องจักรให้บรรจุปริมาณกาแฟในแต่ละกระป๋อง โดยเฉลี่ย 36 ออนซ์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 3.4 บริษัทต้องการทดสอบว่าเครื่องจักรทำงานปกติหรือไม่ จึงสุ่มตัวอย่างกาแฟกระป๋องที่บรรจุแล้วมา 49 กระป๋อง พบว่ามีปริมาณกาแฟเฉลี่ย 35.1 ออนซ์ บริษัทจะสรุปอย่างไร

1. $H_0 : \mu = 36$ 2. $H_1 : \mu \neq 36$ 3. $\alpha = 0.05$

4. ประชากร 1 กลุ่ม รู้ค่า σ ใช้สูตร 1 $\longrightarrow$ $Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

5. เขตวิกฤต



$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = -1.96$ $Z_{0.025} = 1.96$

6. คำนวณ

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{35.1-36}{\frac{3.4}{\sqrt{49}}} = -1.85$$

ดังนั้น เครื่องจักรทำงานเป็นปกติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

7. Z คำนวณ = −1.85 ตกนอกเขตวิกฤต ยอมรับ H_o $\mu = 36$

ตัวอย่าง 2

1. ข้อมูลต่อไปนี้เป็นความยาวของไส้เดือน จำนวน 16 ตัว ที่สุ่มมาจากที่ดินแปลงหนึ่ง ซึ่งวัดความยาวมีหน่วยเป็นเซนติเมตร

6.00	3.61	6.13	3.99	6.92	6.72	7.86	5.98
4.15	6.87	4.17	4.01	3.56	3.04	5.65	7.37

จะสรุปได้หรือไม่ว่า ไส้เดือนจะมีความยาวเฉลี่ย 6.5 เซนติเมตร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$\bar{x} = 5.396 \qquad S = 1.502$

$\bar{x} = 5.396 \quad S = 1.502$

1. $H_0 : \mu = 6.5$

2. $H_1 : \mu \neq 6.5$

3. $\alpha = 0.05$

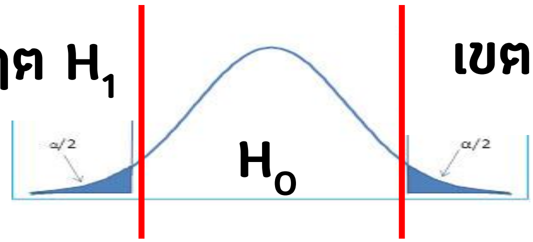
4. สูตร ประชากร 1 กลุ่ม ไม่รู้ σ n<30 ใช้สูตร 3 : t $\quad t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

5. เขตวิกฤต

$\nu = n - 1$

$\nu = 16 - 1 = 15$

เขตวิกฤต H_1 $\quad$ เขตวิกฤต H_1



$t_{0.025,15} = -2.131 \qquad 2.131$

6. คำนวณ $\quad t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{5.396 - 6.5}{\frac{1.502}{\sqrt{16}}} = -2.94$

7. สรุปผล $\quad$ T คำนวณ = −2.94 ตกในเขตวิกฤต ยอมรับ H1

ดังนั้น ไส้เดือนไม่ได้มีความยาวเท่ากับ 6.5 เซนติเมตร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตัวอย่าง 3

ในการทดสอบความแข็งของเหล็ก วิศวกรควบคุมคุณภาพของบริษัทได้ทำการสุ่มเหล็ก AA และเหล็ก BB อย่างละ 10 ชิ้น มาทดสอบความแข็ง ทำการบันทึกค่าไว้ได้ผลทั้งหมดดังตาราง กำหนดระดับนัยสำคัญ 0.10

เหล็ก AA	61	55	43	50	47	43	51	56	56	54
เหล็ก BB	45	47	56	42	52	47	41	48	47	47

อยากทราบว่า เหล็กชนิด AA และ BB มีความแข็ง*แตกต่างกันหรือไม่*

$\bar{x}_{AA} = 51.6$ $S_{AA} = 5.929$ $\bar{x}_{BB} = 47.2$ $S_{BB} = 4.367$

- กำหนดระดับนัยสำคัญ 0.10

อยากทราบว่า เหล็กชนิด AA และ BB มีความแข็ง*แตกต่างกัน*หรือไม่

$\bar{x}_{AA} = 51.6$ $S_{AA} = 5.929$ $\bar{x}_{BB} = 47.2$ $S_{BB} = 4.367$

1. $H_0 : \mu_{AA} = \mu_{BB}$ 2. $H_1 : \mu_{AA} \neq \mu_{BB}$ 3. $\alpha = 0.10$

4. เลือกสูตร ประชากร 2 กลุ่ม ไม่รู้ σ $n < 30$

ทดสอบความแปรปรวน 1. $H_0 : \sigma^2_{AA} = \sigma^2_{BB}$

2. $H_1 : \sigma^2_{AA} \neq \sigma^2_{BB}$

$V_1 = 10-1 = 9$

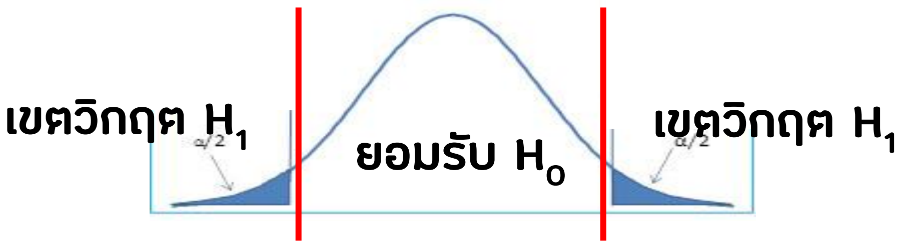
$V_2 = 10-1 = 9$

$F_{\text{คำนวณ}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{5.929^2}{4.367^2} = 1.843$

F ตาราง $= F_{\alpha,v1,v2} = F_{0.05,9,9} = 3.18$

Fคำนวณ < Fตาราง ตกนอกเขตวิกฤต ยอมรับ H_0 ดังนั้น ความแปรปรวนเท่ากัน เลือกสูตรที่ 6

5. เขตวิกฤต



$t_{\alpha,v} = t_{0.05,18}$ = −1.734 1.734

สูตรที่ 6

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$\nu = n_1 + n_2 - 2$

$\nu = 10 + 10 - 2 = 18$

6. คำนวณ

S_P = 5.207 t = 1.89

7. สรุปผล

t คำนวณ = 1.89 ตกในเขตวิกฤต ยอมรับ H_1

ดังนั้น เหล็ก AA ไม่ได้มีความแข็งเท่ากับ เหล็ก BB ที่ระดับนัยสำคัญ 0.1

เพิ่มเติม

กำหนดให้ X Y Z เป็นเลข 3 ตัวท้ายของรหัสนิสิต

เช่น รหัสนิสิต 49363187 จะได้ X=7 Y=8 Z=1

1. ข้อมูลต่อไปนี้เป็นความยาวของไส้เดือน จำนวน 16 ตัว ที่สุ่มมาจากที่ดินแปลงหนึ่ง ซึ่งวัดความยาวมีหน่วยเป็นเซนติเมตร

6.00	3.X1	6.13	3.99	6.92	6.Z2	7.86	5.98
4.15	6.87	4.Y7	4.01	3.56	3.04	5.X5	7.37

จะสรุปได้หรือไม่ว่า ไส้เดือนจะมีความยาวเฉลี่ย 6.5 เซนติเมตร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ทศนิยม 3 ตำแหน่ง

เพิ่มเติม

ในการทดสอบความแข็งของเหล็ก วิศวกรควบคุมคุณภาพของบริษัทได้ทำการสุ่มเหล็ก AA และเหล็ก BB อย่างละ 10 ชิ้น มาทดสอบความแข็ง ทำการบันทึกค่าไว้ได้ผลทั้งหมดดังตาราง

เหล็ก AA	6Y	55	43	50	4Z	43	51	5X	56	54
เหล็ก BB	45	47	5X	42	52	47	4Y	48	47	4Z

- กำหนดระดับนัยสำคัญ 0.10 ใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง

อยากทราบว่า เหล็กชนิด AA และ BB มีความแข็ง*แตกต่างกันหรือไม่*

น้ำหนักมาตรฐานของกล่องบรรจุอาหารเสริมชนิดหนึ่งกำหนดไว้ไม่ให้ต่ำกว่า 10 ออนซ์ ถ้าสุ่มตัวอย่างกล่องขึ้นมา 10 กล่อง ชั่งน้ำหนักได้ค่าดังนี้

10.2, 9.7, 10.1, 9.3, 9.2, 9.8, 9.9, 10.1, 10.3 และ 9.8

จงทดสอบว่าการผลิตยังเป็นไปตามมาตรฐานหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

ตัวอย่าง 3

น้ำหนักมาตรฐานของกล่องบรรจุอาหารเสริมชนิดหนึ่งกำหนดไว้ไม่ให้ต่ำกว่า 10 ออนซ์ ถ้าสุ่มตัวอย่างกล่องขึ้นมา 10 กล่อง ชั่งน้ำหนักได้ค่าดังนี้

10.2, 9.7, 10.1, 9.3, 9.2, 9.8, 9.9, 10.1, 10.3 และ 9.8

จงทดสอบว่าการผลิตยังเป็นไปตามมาตรฐานหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

ตัวอย่าง 4

ถ้าคะแนนการสอบโดยใช้ข้อสอบมาตรฐานมีการแจกแจงปกติ โดยมีคะแนนเฉลี่ย 70 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 ครูผู้หนึ่งต้องการพัฒนาความสามารถของนักเรียนในการทำข้อสอบมาตรฐาน จึงสุ่มนักเรียน 25 คน แล้วทดลองสอบโดยใช้วิธีใหม่ ปรากฏว่า เมื่อให้นักเรียนกลุ่มนี้สอบข้อสอบมาตรฐานทำได้คะแนนเฉลี่ย 74 คะแนน พอจะสรุปได้หรือไม่ว่า การสอบโดยวิธีใหม่ ทำให้นักเรียนสามารถทำคะแนนสอบมาตรฐานได้สูงขึ้น ใช้ความมีนัยสำคัญ 0.05

ตัวอย่าง 2

ผู้จัดการโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งคาดว่าปริมาณวัตถุดิบเฉลี่ยที่ใช้ในโรงงานจะไม่ต่ำกว่า 880 ตันต่อวัน จึงเก็บข้อมูลปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ต่อวันมา 50 วัน คำนวณได้ปริมาณเฉลี่ย 871 ตันต่อวัน ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 21 ตัน การคาดคะเนของผู้จัดการถูกต้องหรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตัวอย่าง 2

การตรวจสอบคุณภาพอาหารกระป๋อง กำหนดเกณฑ์ไว้ว่า อาหารกระป๋องจะมีแบคทีเรียเฉลี่ยไม่เกิน 62.0 หน่วย ต้องการทดสอบว่า อาหารกระป๋องยี่ห้อหนึ่งมีคุณภาพตามเกณฑ์หรือไม่ จึงสุ่มอาหารกระป๋องมา 9 กระป๋อง พบว่ามีแบคทีเรียเฉลี่ย 62.5 หน่วย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.8 กรรมการจะสรุปว่าอย่างไร

8. ประชากรชุดเดียวแต่มีการสุ่มตัวอย่างเป็นคู่ (Paired Observations)

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \quad \text{หรือ} \quad t = \frac{\sum d}{\dfrac{N\sum d^2 - (\sum d)^2}{n-1}}$$

$v = n - 1$

เมื่อ d คือ ผลต่างระหว่างค่าสังเกต

สรุปการเลือกใช้สูตร